Об одной классификации неподвижных точек

А. Н. Шарковский

В этой работе дается некоторая классификация неподвижных точек произвольного отображения T евклидова пространства R^n в себя.

1. Рассмотрим произвольное замкнутое множество пространства R^n, содержащее вместе с точкой x точки λx, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Всякий топологический образ такого множества, при котором начало координат отображается в точку $\alpha \in R^n$, назовем конусом с вершиной в точке α или просто конусом в точке α.

Под окрестностью точки α понимается всякое множество $U \subset R^n$, содержащее открытое множество $U' \ni \alpha$.

Пусть α — неподвижная точка отображения T, т. е. $T\alpha = \alpha$. Конус K в точке α назовем i-конусом, если существует окрестность U точки α такая, что $T(K \cap U) \subseteq K$.

Обозначим множество всех i-конусов в точке α через $K_\alpha(T)$. Все пространство R^n и множество, состоящее из одной точки α, являются i-конусами. Если $K_1, K_2 \in K_\alpha(T)$, то и $K_1 \cup K_2 \in K_\alpha(T)$, $K_1 \cap K_2 \in K_\alpha(T)$. Таким образом, множество $K_\alpha(T)$ образует структуру.

Если $K_1, K_2 \in K_\alpha(T)$ и $K_1 \cap K_2 = \alpha$, $K_1 \neq \alpha$, $K_2 \neq \alpha$, то поведение итерационных последовательностей $\{T^j x\}_{j=0}^{\infty}$ в конусе K_1 и поведение последовательностей $\{T^j x\}$ в конусе K_2 вблизи точки α не зависят друг от друга.

Вопрос о классификации неподвижных точек распадается на два: 1) описание структуры $K(T)$, 2) классификация i-конусов по поведению итерационных последовательностей в них вблизи точки α.

Ниже рассматривается лишь второй вопрос.

2. Пусть α — неподвижная точка и $K \in K_\alpha(T)$, $K \neq \alpha$. Поскольку в дальнейшем речь будет идти лишь о точках конуса K, под окрестностью U точки α удобно понимать $U' \cap K$, где U' — определенная выше окрестность точки α. Далее будем пользоваться только такими окрестностями.

Рассмотрим произвольную окрестность U точки α. Разобьем точки U, отличные от точки α, на три класса.

Всякую точку $x \in U$, для которой $T^j x \in U$, $j = 1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{j\to\infty} T^j x = \alpha$, назовем α-точкой.

Если $x \in U$ и $T^j x \in U$, $j = 1, 2, \ldots$, но $\lim\limits_{j\to\infty} T^j x$ либо не существует, либо $\neq \alpha$, точку x назовем i-точкой.

Наконец, если для точки $x \in U$ найдется номер $m > 0$ такой, что $T^m x \overline{\in} U$, то это r-точка.

Всякая точка $x \in U$ принадлежит к одному и только одному классу.

Если $x \in U$ есть a- или i-точка, то она является таковой и для всякой окрестности $U' \supset U$.

Скажем, что неподвижная точка α обладает

1) свойством a (в конусе K), если всякая окрестность точки α содержит a- точки;

2) свойством i, если всякая окрестность содержит i-точки;

3) свойством r, если всякая окрестность, содержащаяся в некоторой окрестности U_0, содержит r- точки.

Всякая неподвижная точка обладает по крайней мере одним из этих свойств. В самом деле, пусть $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ — окрестности точки α и $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} U_j = \alpha$. Если существует подпоследовательность $\{U_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что всякая окрестность U_{j_k} содержит a-точки, то любая окрестность U точки α содержит a-точки и, следовательно, α обладает свойством a. Аналогично, если существует подпоследовательность $\{U_{j_k}\}$ такая, что всякая окрестность U_{j_k} содержит i-точки, то α обладает свойством i.

Предположим, не существует подпоследовательности $\{U_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$, каждая окрестность U_{j_k} которой содержит либо a-точки, либо i-точки. Тогда существует окрестность U_{i_0}, состоящая только из r-точек. Всякая окрестность $U \subset U_{j_0}$, как следует из определения r-точек, также состоит из r-точек и, следовательно, неподвижная точка обладает свойством r.

Если неподвижная точка не обладает каким-либо из свойств a, i или r, скажем, что неподвижная точка обладает свойством $\bar{\alpha}$, $\bar{i}$ или $\bar{r}$ соответственно.

Назовем неподвижную точку, обладающую свойствами

1) $a\ \ \bar{i}\ \ \bar{r}$, притягивающей;
2) $\bar{a}\ \ \bar{i}\ \ r$, отталкивающей;
3) $\bar{a}\ \ i\ \ \bar{r}$, безразличной;
4) $a\ \ i\ \ \bar{r}$, полупритягивающей;
5) $\bar{a}\ \ i\ \ r$, полуотталкивающей;

6_1) $a\ \ \bar{i}\ \ r$,
смешанной.
6_2) $a\ \ i\ \ r$,

Всякая неподвижная точка принадлежит к одному и только одному типу. Как будет видно ниже, существуют неподвижные точки каждого из типов.

3. При построении данной классификации имелись в виду, вообще говоря, непрерывные отображения вещественной прямой. Именно такие отображения рассматриваются ниже (п. 4—6), и по крайней мере для них данная классификация оказывается достаточно хорошей: все типы неподвижных точек определяются простым набором инвариантов (свойств) и при этом классификация обладает достаточной «разрешающей силой».

В случае необходимости (например, при рассмотрении более широкого класса отображений, чем непрерывные отображения вещественной прямой) построенная нами классификация может быть легко «усилена».

В основу данной классификации взято разбиение точек окрестности неподвижной точки на три класса. Если же использовать разбиение точек окрестности на большее число классов, являющихся подклассами указанных выше трех классов, то в результате мы получим «более сильную» классификацию.

Заметим, однако, что даже для непрерывных отображений вещественной прямой рассмотрение только конусов, принадлежащих $K_\alpha(T)$, может оказаться недостаточным. И, по-видимому, в первую очередь, возникнет необходимость рассматривать более широкий класс множеств или конусов, чем тот, который составляет структуру $K_\alpha(T)$.

Примеры классификаций неподвижных точек имеются в [2, 3].

4. Итак, предположим, что T есть непрерывное отображение отрезка вещественной прямой в себя.

Под окрестностями точек, для простоты, будем понимать связные окрестности.

Пусть α — неподвижная точка. Предположим, отрезок $x \geqslant \alpha$, является i-конусом в точке α, т. е. существует окрестность U точки α такая, что для $x \geqslant \alpha$, $x \in U$, и $Tx \geqslant \alpha$. Рассмотрим введенную классификацию неподвижных точек в таком конусе.

Окрестностями точки α являются в этом случае интервалы вида $[\alpha, \beta)$ и $[\alpha, \beta]$. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Неподвижная точка α обладает свойством a тогда и только тогда, когда существует последовательность точек $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots \to \alpha$ такая, что $\alpha \leqslant Tx_j \leqslant x_{j+1}$, $j = 1, 2, \ldots$*

Теорема 2. *Неподвижная точка α обладает свойством r тогда и только тогда, когда существует последовательность точек $x_1 > x_2 > \ldots \to \alpha$ такая, что $Tx_{j+1} \geqslant x_j$, $j = 1, 2, \ldots$*

Теорема 3. *Неподвижная точка α обладает свойством i тогда и только тогда, когда существует последовательность точек $x_1 > x_2 > \ldots \to \alpha$ такая, что $Tx_j = x_j$, $j = 1, 2, \ldots$*

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Предположим, x есть a-точка некоторой окрестности и точки $T^j x$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, попарно различны. Выберем из точек $T^j x$ те, для которых $T^{j+1}x < T^j x$ и для любой точки $T^k x \in (T^{j+1}x, T^j x)$ $T^{k+1}x > T^{j+1}x$. Обозначим выбранные точки $T^j x$ через x_1, x_2, x_3, $\ldots$ следующим образом: если $T^{j_1}x = x_{i_1}$, $T^{j_2}x = x_{i_2}$ и $T^{j_1}x > T^{j_2}x$, то $i_1 < i_2$. Последовательность x_1, x_2, $\ldots$ является искомой.

Если для каждой a-точки x всякой окрестности точки α среди точек $T^j x$ лишь конечное число различных, то найдется последовательность $x_1 > x_2 > \ldots \to \alpha$ такая, что $Tx_j = \alpha$, $j = 1, 2, \ldots$

Достаточность. Если α не является предельной (справа) для неподвижных точек (первого порядка), то существует окрестность точки α, в которой в силу непрерывности T $Tx < x$. В этом случае, как легко видеть, всякая точка окрестности есть a-точка.

Предположим, α является предельной для неподвижных точек. Пусть β_j, $j = 1, 2, \ldots$, — ближайшая к x_j справа неподвижная точка (не ограничивая общности, можно считать, что точка β_1 существует). Очевидно, $\beta_j \geqslant \beta_{j+1}$ и $\beta_j \to \alpha$ при $j \to \infty$. $T[x_j, \beta_j] \supseteq [x_{j+1}, \beta_{j+1}]$, $j = 1, 2, \ldots$

Пусть U — произвольная окрестность точки α. Найдется номер k такой, что $\beta_k \in U$. Рассмотрим интервал $[x_k, \beta_k]$. Найдется интервал $[\gamma_1, \delta_1] \subset [x_k, \beta_k]$ такой, что $T[\gamma_1, \delta_1] = [x_{k+1}, \beta_{k+1}]$. Далее найдется интервал $[\gamma_2, \delta_2] \subset [\gamma_1, \delta_1]$ такой, что $T^2[\gamma_2, \delta_2] = [x_{k+2}, \beta_{k+2}]$ и т. д. Всякая точка $x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} [\gamma_j, \delta_j]$ есть a-точка окрестности U (и притом точки последовательности $\{T^j x\}$ монотонно приближаются к точке α).

Доказательство теоремы 2. Необходимость. Пусть всякая окрестность $U \subseteq U_0$ содержит r-точки. Можно считать, что для любой точки $x \in U_0$ $Tx \geqslant \alpha$.

Возьмем произвольную окрестность $[\alpha, x_1] \subset U_0$. Существуют точки $x \in [\alpha, x_1]$, для которых $Tx \geqslant x_1$. Пусть x_2 — наименьшая из них. Очевидно, $Tx_2 = x_1$ и $x_2 < x_1$. Существуют точки $x \in [\alpha, x_2]$, для которых $Tx \geqslant x_2$. Пусть x_3 — наименьшая из них. Продолжая этот процесс, получим последовательность точек $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots$, таких, что $Tx_{j+1} = x_j$, $j = 1, 2, \ldots$ Утверждается, что $x_j \to \alpha$. Допустим, $x_j \to \beta > \alpha$. Поскольку окрестность $[\alpha, \beta]$ содержит r-точки, найдется точка $x' \in [\alpha, \beta]$ такая, что

$Tx' > \beta$. Найдется номер k, для которого $Tx' \geqslant x_k$, и согласно выбору точек x_j должно быть $x_{k+1} \leqslant x' \leqslant \beta$.

Достаточность. $T[\alpha, x_{j+1}] \supseteq [\alpha, x_j]$, $j = 1, 2, \ldots$ Следовательно, $T^j[\alpha, x_{j+1}] \supseteq [\alpha, x_1]$ и найдется точка $x \in [\alpha, x_{j+1}]$, такая, что $x_2 < T^j x \leqslant \leqslant x_1$. Таким образом, всякая окрестность $U \subseteq [\alpha, x_2]$ содержит r-точки.

Доказательство теоремы 3. Необходимость. Пусть U — произвольная замкнутая окрестность точки α. Покажем, что U содержит неподвижную точку, отличную от точки α.

Пусть x — i-точка окрестности U. Если $T^j x = T^{j+1} x$ при каком-либо $j = j'$, то точка $\beta = T^{j'} x$ является неподвижной точкой, отличной от α.

Предположим, $T^j x \neq T^{j+1} x$ при любом $j \geqslant 0$, и пусть $x > Tx$. Если $Tx > T^2 x > \ldots$, то последовательность сходится, и если $T^j x \to \beta$, то $\beta \in U$, $\beta \neq \alpha$ и в силу непрерывности T $T\beta = \beta$. Если же существует номер $k > 0$, при котором $T^k x < T^{k+1} x$, то между точками x и $T^k x$ опять-таки в силу непрерывности T найдется точка β, для которой $T\beta = \beta$. Аналогичная ситуация при $x < Tx$.

Достаточность условий теоремы очевидна.

Доказанные теоремы дают критерии принадлежности неподвижных точек к каждому из типов.

Для изучаемого отображения свойства a, i, r не независимы: если неподвижная точка обладает свойствами a и r, то она обладает и свойством i. Этот результат сразу следует из теорем 1—3 и непрерывности T. Таким образом, смешанных неподвижных точек типа 6_1 не существует.

Неподвижные точки всех остальных типов существуют.

Неподвижная точка α является притягивающей в том и только в том случае, когда $Tx < x$ для $x > \alpha$ из некоторой окрестности U точки α.

Неподвижная точка α является отталкивающей в том и только в том случае, когда $Tx > x$ для $x > \alpha$ из некоторой окрестности U точки α.

Неподвижные точки остальных типов являются предельными для неподвижных точек.

Пусть J^α — последовательность открытых интервалов $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющая условиям: 1) $x' > x''$ для любых $x' \in I_{k'}$, $x'' \in I_{k''}$, как только $k' < k''$; 2) $I_k \to \alpha$ при $k \to \infty$.

Неподвижная точка α, предельная для неподвижных точек, обладает свойством a в том и только в том случае, когда существует последовательность $J^\alpha = \{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $Tx < x$ для $x \in I_k$, $k = 1, 2, \ldots$, и для любого k найдется точка $x_k \in I_k$, для которой $Tx_k \in I_{k+1}$.

Утверждение следует из теоремы 1. Достаточно лишь заметить, что для любой точки $x' \in I_{k+1}$ найдется номер $m > 0$, такой, что $T^m x_k < x'$.

Неподвижная точка α обладает свойством r в том и только в том случае, когда существует последовательность $J^\alpha = \{I_k\}_{k=1}^{\infty}$, такая, что $Tx > > x$ для $x \in I_k$, $k = 1, 2, \ldots$, и для любого k найдется точка $x_{k+1} \in I_{k+1}$, для которой $Tx_{k+1} \in I_k$.

Утверждение следует из теоремы 2.

Теперь не представляет труда получить графическое представление непрерывной функции $y = f(x)$, задающей отображение T, в окрестности неподвижной точки каждого типа.

5. Пусть U — произвольная окрестность неподвижной точки α (в конусе $x \geqslant \alpha$). Обозначим $\mathfrak{A}(U)$ множество всех a-точек окрестности U, $\mathfrak{J}(U)$ — множество всех i-точек и $\mathfrak{R}(U)$ — множество r-точек.

Естественно ожидать, что структура множеств $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{R}$ зависит от типа неподвижной точки.

Множество $\mathfrak{R}$ есть всегда множество типа F_σ. Более того, если U — открытая окрестность (т. е. полуинтервал), то $\mathfrak{R}$ есть открытое множество. Если α — притягивающая точка, то для всякой окрестности U, содержащейся в некоторой окрестности U_0, $\mathfrak{R}$ — пустое множество; если α — полупритягивающая или безразличная точка, то окрестность $U \subset U_0$ можно выбрать так, чтобы $\mathfrak{R}$ также было пустым множеством.

Займемся множеством $\mathfrak{N}$. Если α — отталкивающая, полуотталкивающая или безразличная точка, то для всякой окрестности $U \subset U_0 \mathfrak{N}$ есть пустое множество.

Теорема 4. *Неподвижная точка является притягивающей тогда и только тогда, когда для всякой открытой окрестности U точки α, содержащейся в некоторой окрестности U_0, множество $\mathfrak{N}$ есть открытое множество.*

Теорема 5. *Неподвижная точка является полупритягивающей тогда и только тогда, когда для всякой окрестности U множество $\mathfrak{N}$ есть G_δ-множество и не есть F_σ-множество.*

Теорема 6. *Неподвижная точка является смешанной тогда и только тогда, когда для всякой окрестности U множество $\mathfrak{N}$ есть $F_{\sigma\delta}$-множество и не есть $G_{\delta\sigma}$-множество.*

Сформулированные (и частично доказанные) результаты можно представить в виде следующей таблицы.

Тип неподвижной точки	$\mathfrak{N}$	$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{J}$
Притягивающая	G	$\varnothing$	$\varnothing$
Отталкивающая	$\varnothing$	G	$\varnothing$
Безразличная	$\varnothing$	$\varnothing$	$F \setminus \alpha(G)$
Полупритягивающая	G_δ	$\varnothing$	F_σ
Полуотталкивающая	$\varnothing$	G	$F \setminus \alpha$
Смешанная	$F_{\sigma\delta}$	G	$G_{\delta\sigma}$

Во всякой окрестности неподвижной точки α любого типа найдется окрестность U, которая распадается на множества $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{R}$ указанным в таблице образом (G обозначает открытое, F — замкнутое множество). При этом для любой окрестности $U' \subset U$ множества $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{R}$ не являются множествами более простого типа. Исключение может составить безразличная точка: если во всякой окрестности существует окрестность U, содержащая только i-точки и притом открытая, то множество $\mathfrak{J}$ будет открытым.

Доказательство теорем 4—6. Если неподвижная точка α является притягивающей, то для всякой открытой окрестности U, содержащейся в некоторой окрестности U_0, состоящей только из a-точек множество $\mathfrak{N}$ есть открытое множество.

Пусть α — неподвижная точка произвольного типа, $U = [\alpha, \beta]$ и $\gamma = \max\{\beta, \sup\limits_{x \in U} Tx\}$. Построим отображение T отрезка $[\alpha, \gamma]$ в себя: $\overline{T}x = Tx$ при $\alpha \leqslant x < \beta$, $\overline{T}x = T\beta$ при $\beta \leqslant x \leqslant \gamma$. Множества $\mathfrak{N}(u')$, $\mathfrak{J}(u')$, $\mathfrak{R}(u')$ для отображений T и $\overline{T}$ совпадают.

В дальнейшем будет рассматриваться лишь отображение $\overline{T}$ и поэтому для удобства будем писать T вместо $\overline{T}$. Итак, непрерывное отображение T задано на интервале $R = [\alpha, \gamma]$; $TR \subseteq R$ и $T\alpha = \alpha$.

Точку $y \in R$ назовем ω-предельной точкой последовательности $\{T^j x\}_{j=0}^{\infty}$, если существует последовательность $j_1 < j_2 < \ldots$ такая, что $T^{j_k}x \to y$ при $k \to \infty$ (не исключено, что $T^{j_k}x = y$, начиная с некоторого $k' \geqslant 1$). Множество ω-предельных точек последовательности $\{T^j x\}_{j=0}^{\infty}$ обозначим Ω_x. Пусть Ω — произвольное замкнутое множество. Множество точек $x \in R$, для которых $\Omega_x = \Omega$, обозначим $P(\Omega)$. В частности, $P(\alpha)$ есть множество точек $x \in R$, для которых $T^j x \to \alpha$ при $j \to \infty$.

Если точка $\beta \overline{\in} P(\alpha)$, то $P(\alpha) = \mathfrak{N} \cup \alpha$. Если же $\beta \in P(\alpha)$, то $[\beta, \gamma] \subset \subset P(\alpha)$ и $P(\alpha) = \mathfrak{N} \cup \alpha \cup \bigcup_{j=0}^{\infty} T^{-j}[\beta, \gamma]$, где $T^{-j}[\beta, \gamma]$ — множество точек $x \in R$, для которых $T^j x \in [\beta, \gamma]$. Множество $\alpha \cup \bigcup_{j=0}^{\infty} T^{-j}[\beta, \gamma]$ есть F_σ-множество.

Итак, имеем:

1) если точка α — притягивающая, то для всякой открытой окрестности U точки α, содержащейся в некоторой окрестности U_0, множество $\mathfrak{N}$ является открытым множеством;

2) множество $\mathfrak{N} = P(\alpha) \setminus \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{B}$ — некоторое множество типа F_σ.

В работе [4] доказано, что

3) множество $P(\alpha)$ есть множество типа $F_{\sigma\delta}$;

4) множество $\bigcup_{\Omega \supseteq \alpha} P(\Omega)$ есть множество типа G_δ.

Ниже доказываются следующие утверждения:

5) если во всякой окрестности точки α есть a- и i-точки, то $P(\alpha)$ есть множество класса > 1 классификации Бэра — Валле-Пуссена (см. [5]);

6) если во всякой окрестности точки α, содержащейся в некоторой окрестности U_0, есть a- , i- и r-точки (т. е. α является смешанной точкой), то $P(\alpha)$ есть множество 3-го класса.

Необходимость условий теоремы 4 следует из утверждения 1).

Необходимость условий теоремы 5 следует из утверждений 2), 4), 5).

В самом деле, если α — полупритягивающая точка, то во всякой окрестности U точки α найдется окрестность U', не содержащая r-точек: для любой точки $x \in U'$ $T^j x \in U'$ при $j > 0$. Следовательно, множеств $\Omega \supset \supset \alpha$, для которых $P(\Omega)$ не пусто, не существует. Из 4) следует, что $P(\alpha)$ есть G_δ-множество. Поскольку $P(\alpha)$ является множеством класса > 1 (утверждение 5)), то являясь G_δ, оно не может быть F_σ-множеством (см. [5]). Из 2) следует, что множество $\mathfrak{N}$ есть G_δ и не является F_σ-множеством.

Необходимость условий теоремы 6 следует из утвержденийй 3) и 6).

Для любой окрестности точки α, содержащейся в некоторой окрестности U_0, множество $\mathfrak{N}$ не пусто лишь для притягивающей, полупритягивающей и смешанной точек. Поэтому достаточность условий теоремы 4 вытекает из необходимости условий теорем 5 и 6, достаточность условий теоремы 5 вытекает из необходимости условий теорем 4 и 6, достаточность условий теоремы 6 вытекает из необходимости условий теорем 4 и 5.

Итак, перейдем к доказательству утверждений 5 и 6.

Лемма 1. *Если во всякой окрестности неподвижной точки α есть a-точки, то во всякой окрестности любой точки $x \in P(\alpha)$ существует точка $x' < x$, $x' \in P(\alpha)$ (если $x \neq \alpha$) и точка $x'' > x$, $x'' \in P(\alpha)$ (если $x \neq \gamma$).*

В самом деле, точка α является предельной для точек множества $P(\alpha)$; пусть $\beta_1 > \beta_2 > \ldots \to \alpha$ и $\beta_k \in P(\alpha)$, $k = 1, 2, \ldots$ Пусть U — произвольная окрестность точки x. Покажем, например, что существует точка $x' \in U$, $x' < x$, $x' \in P(\alpha)$. Возьмем открытый интервал $U' \subset U$, правым концом которого является точка x. Так как $x \in P(\alpha)$, для каждой точки β_k найдется номер j_k, такой, что $T^j x \in [\alpha, \beta_k)$ при $j \geqslant i_k$. Если $T^j U' \subset [\alpha, \beta_k)$ при $j \geqslant j_k$, $k = 1, 2, \ldots$, то $U' \subset P(\alpha)$. Если же существует номер k', такой, что $T^{j'} U' \not\subset [\alpha, \beta_{k'})$ при некотором $j' \geqslant j_{k'}$, то $T^{j'} U' \ni \beta_{k'}$ и, следовательно, существует точка $x' \in U'$, для которой $T^{j'} x' = \beta_{k'}$, т. е. $x' \in P(\alpha)$.

Лемма 2. *Если во всякой окрестности точки α есть i-точки и если интервал $(x', x'') \subset P(\alpha)$, то и точки $x', x'' \in P(\alpha)$.*

Точка α является предельной (справа) для неподвижных точек; пусть $\beta_1 > \beta_2 > \ldots \to \alpha$, где β_k, $k = 1, 2, \ldots$, — неподвижные точки. Пусть

$x \in (x', x'')$. Так как $x \in P(\alpha)$, для каждой точки β_k найдется номер j_k, такой, что $T^j x \in [\alpha, \beta_k)$ при $j \geqslant j_k$. Так как $\beta_k \overline{\in} P(\alpha)$, то $T^j(x', x'') \subset [\alpha, \beta_k)$ при $j \geqslant j_k$ и, следовательно, $T^j[x', x''] \subset [\alpha, \beta_k]$ при $j \geqslant j_k$. Поскольку $\beta_k \to \alpha$ при $k \to \infty$, то $T^j x' \to \alpha$ и $T^j x'' \to \alpha$ при $j \to \infty$.

Предположим, во всякой окрестности точки α есть a- и i-точки.

Обозначим $P_1(\alpha)$ множество точек, которые принадлежат $P(\alpha)$ вместе с некоторой открытой окрестностью (в пространстве R). Множество $P_1(\alpha)$ есть открытое в R можество.

Множество $P_2(\alpha) = P(\alpha) \setminus P_1(\alpha)$ состоит из тех и только тех точек множества $P(\alpha)$, которые являются предельными для точек множества $R \setminus P(\alpha)$.

Множество $P_2(\alpha)$ плотно в себе. Действительно, пусть точка $x \in P_2(\alpha)$ и $\beta_1 < \beta_2 < \ldots \to x$ (или $\beta_1 > \beta_2 > \ldots \to x$), где $\beta_k \in R \setminus P(\alpha)$, $k = 1, 2, \ldots$. Пусть $x' \in P(\alpha) \cap (\beta_k, \beta_{k+1})$. Либо $x' \in P_2(\alpha)$, либо $x' \overline{\in} P_2(\alpha)$. Если $x' \overline{\in} P_2(\alpha)$, найдется интервал $[x'', x'''] \subset P(\alpha)$, содержащий точку x', причем $x'', x''' \in P_2(\alpha)$ (лемма 2). Так как $\beta_k, \beta_{k+1} \overline{\in} P(\alpha)$, то $[x'', x'''] \subset (\beta_k, \beta_{k+1})$. Итак, если интервал (β_k, β_{k+1}) содержит точку множества $P(\alpha)$, то он содержит и точку множества $P_2(\alpha)$. Поскольку x является предельной слева (справа) для точек множества $P(\alpha)$ (лемма 1), то точка x является предельной слева (справа) и для точек множества $P_2(\alpha)$.

Множество $P_2(\alpha)$ по определению есть нигде не плотное на R множество. Обозначим Q замыкание множества $P_2(\alpha)$. Q есть совершенное нигде не плотное множество.

Утверждается, что на множестве Q всюду плотно лежат точки множества $R \setminus P(\alpha)$. В самом деле, допустим противное: существует открытый интервал $I \subset R$, такой, что $P_2(\alpha) \cap I$ есть совершенное множество. Рассмотрим произвольный открытый интервал $I' \subset I$, смежный к множеству $P_2(\alpha) \cap I$.

Интервал I' не содержит точек множества $R \setminus P(\alpha)$. Действительно, предположим, существует точка $x \in I' \cap \{R \setminus P(\alpha)\}$. Пусть x', — например, левый конец интервала I'; $x' \in P_2(\alpha)$. Как было показано выше, точка x' не является предельной справа для точек множества $R \setminus P(\alpha)$. Следовательно (лемма 2), существует интервал $[x', x''] \subset P(\alpha)$, $x'' \in P_2(\alpha)$, $x'' \neq x'$. Так как $x \overline{\in} P(\alpha)$, то $x'' < x$, т. е. $x'' \in P_2(\alpha) \cap I'$, в то время как $P_2(\alpha) \cap I'$ — пустое множество.

Таким образом, $I' \subset P(\alpha)$. Следовательно, $I \subset P(\alpha)$ и множество $P_2(\alpha) \cap I$ должно быть пустым.

Итак, точки множества $R \setminus P(\alpha)$ лежат на Q всюду плотно и, следовательно, множество $P_2(\alpha)$, а вместе с ним и множество $P(\alpha)$, являются множествами класса > 1 классификации Бэра — Валле-Пуссена [5]*. Этим самым утверждение 5 доказано.

Перейдем к доказательству утверждения 6.

Лемма 3. *Если множество Ω бесконечно, то во всякой окрестности точки $x \in P(\Omega)$ есть точка $x' < x$, $x' \in P(\Omega)$ и точка $x'' > x$, $x'' \in P(\Omega)$ (если $x \neq \gamma$).*

Пусть U — произвольная окрестность точки x. Покажем, например, что существует точка $x' \in U$, $x' < x$, $x' \in P(\Omega)$. Возьмем открытый интервал $U' \subset U$, правым концом которого является точка x.

Пусть y — произвольная точка множества Ω. Так как Ω — бесконечное множество, точки $T^j x$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, попарно различны. Найдется последовательность чисел $j_1 < j_2 < \ldots < j_k < \ldots$, $j_k = j_k(y)$, такая, что $T^{j_1} x <$

* Для того чтобы множество $E \subset R$ было множеством класса $\leqslant 1$, необходимо (и достаточно), чтобы каково бы ни было совершенное множество Q существовало открытое в R множество G, такое, что $Q \cap G$ содержится либо в E, либо в $R \setminus E$ (Бэр, см. [5]).

$< T^{j_2}x < \ldots \to y$ (либо $T^{j_1}x > T^{j_2}x > \ldots \to y$). Возможны два случая: либо для любого $k \geqslant 1$ и любой точки $y \in \Omega$ $T^{j_{k-1}}x < T^{j_k}\tilde{x} < T^{j_{k+1}}x$ для всех $\tilde{x} \in U'$ и тогда $U' \subset P(\Omega)$, либо существует точка $y' \in \Omega$ и номер $k' \geqslant 1$ такие, что указанное соотношение не выполняется. Последнее означает, что $T^{j_{k'}}U' \ni T^{j_{k'-1}}x$ (либо $T^{j_{k'+1}}x$), т. е. существует точка $x' \in U'$, для которой $T^{j_{k'}}x' = T^{j_{k'-1}}x$, и, следовательно, $x' \in P(\Omega)$.

Лемма 4. *Если множество Ω бесконечно и интервал $(x', x'') \subset P(\Omega)$, то и точки $x', x'' \in P(\Omega)$.*

Обозначим I_k, $k \geqslant 0$, максимальный интервал (открытый, полуоткрытый или замкнутый), принадлежащий $P(\Omega)$ и содержащий интервал $T^k(x', x'')$. Интервал I_k может состоять и из одной точки. Нужно доказать, что I_0 — замкнутый интервал.

Если какие-либо два интервала I_k и I_{k+m} имеют общие точки, то согласно определению $I_k = I_{k+m}$. Это означает, что $T^m I_k \subseteq I_k$. Если существует точка $x \in I_k$, для которой $T^m x = x$, то $x \bar{\in} P(\Omega)$, а это невозможно. Таким образом, либо $T^m x > x$ для $x \in I_k$, либо $T^m x < x$. Предположим, для определенности, что $T^m x > x$ для $x \in I_k$. Обозначим правый конец интервала I_k через y. Так как $T^m I_k \subseteq I_k$, то $T^m y = y$ и для любой точки $x \in I_k$ $x < T^m T < \ldots$ $\ldots < T^{sm}x < \ldots \to y$ при $s \to \infty$. Следовательно, для любой точки $x \in I_k$ $\Omega_x)$ состоит из точек $y, Ty, \ldots, T^{m-x}$, что невозможно, поскольку $x \in P(\Omega$ и множество Ω бесконечно.

Итак, интервалы I_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, не имеют попарно общих точек. Следовательно, концы интервала I_0 принадлежат $P(\Omega)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что для любой точки $x \in I_0$ как только $T^{j_1}x < T^{j_2}x < T^{j_3}x$, то и $T^{j_1}x < T^{j_2}\tilde{x} < T^{j_3}x$ для всех $\tilde{x} \in I_0$.

Всюду в дальнейшем будет предполагаться, что α — смешанная неподвижная точка.

Лемма 5. *Множество $P^*(\alpha) = \bigcup_{\Omega \supseteq \alpha} P(\Omega)$ обладает свойствами:*

1) *во всякой окрестности точки $x \in P^*(\alpha)$ есть точка $x' < x$, $x' \in P^*(a)$ (если $x \neq \alpha$) и точка $x'' > x$, $x'' \in P^*(\alpha)$ (если $x \neq \gamma$);*

2) *если интервал $(x^{(1)}, x^{(2)}) \subset P^*(\alpha)$, то существует такое $\Omega \supseteq \alpha$, что $(x^{(1)}, x^{(2)}) \subset P(\Omega)$ и точки $x^{(1)}, x^{(2)} \in P(\Omega)$.*

Если $\Omega \supset \alpha\, (\Omega \neq \alpha)$ и $P(\Omega)$ не пусто, то Ω является бесконечным множеством, так как конечное Ω есть цикл [4]. Свойство 1) вытекает из лемм 1 и 3.

Допустим, $(x^{(1)}, x^{(2)}) \subset P^*(\alpha)$ и не существует множество $\Omega \supseteq \alpha$, такое, что $(x^{(1)}, x^{(2)}) \subset P(\Omega)$. Утверждается, что в таком случае найдутся множества Ω_1 и Ω_2, $\Omega_2 \nsubseteq \Omega_1$, обладающие свойством: существует точка $y \in P(\Omega_2) \cap$ $\cap (x^{(1)}, x^{(2)})$, предельная для точек множества $\bigcup_{\Omega \subseteq \Omega_1} P(\Omega)$.

Действительно, в этом случае найдутся интервал $[x_1, x_2] \subset (x^{(1)}, x^{(2)})$ и по крайней мере два множества $P(\Omega')$ и $P(\Omega'')$, $\Omega' \neq \Omega''$, содержащие точки во множестве $[x_1, x_2]$. Всякое множество $P(\Omega) \cap [x_1, x_2]$, если оно не пусто, согласно леммам 1 и 3 является незамкнутым множеством.

Возможны два случая: либо существует множество Ω_1, такое, что $P(\Omega_1) \cap [x_1, x_2]$ не пусто, а для всякого $\Omega' \subset \Omega_1$ множество $P(\Omega') \cap [x_1, x_2]$ пусто, либо существует последовательность множеств $\Omega^{(1)} \supset \Omega^{(2)} \supset \ldots$ $\ldots \supset \Omega^{(\zeta)} \supset \ldots$ такая, что для всякого $\zeta < \varrho$, где ϱ — некоторое порядковое число второго рода, множество $P(\Omega^{(\zeta)}) \cap [x_1, x_2]$ не пусто, а для всякого $\Omega' \subseteq \bigcap_{\zeta < \varrho} \Omega^{(\zeta)}$ множество $P(\Omega') \cap [x_1, x_2]$ пусто. Так как множества $\Omega^{(\zeta)}$ замкнуты, то $\varrho < \omega_1$.

В первом случае, поскольку множество $P(\Omega_1) \cap [x_1, x_2]$ не замкнуто, найдется точка $y \in [x_1, x_2]$, $y \overline{\in} P(\Omega_1)$, предельная для точек множества $P(\Omega_1) \cap [x_1, x_2]$; точка y принадлежит некоторому множеству $P(\Omega_2)$, $\Omega_2 \supset \alpha$; очевидно $\Omega_2 \not\subseteq \Omega_1$.

Во втором случае поступим следующим образом. Обозначим F_ζ, $\zeta < \varrho$, замыкание множества $\bigcup_{\zeta' > \zeta} \{P(\Omega^{(\zeta')}) \cap [x_1, x_2]\}$. $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_\zeta \supset \ldots$. Множество $F = \bigcap_{\zeta < \varrho} F_\zeta$ не пусто, так как не пусто каждое из замкнутых множеств F_ζ. Всякая точка $y \in F$ принадлежит $[x_1, x_2]$ и, следовательно, существует $\Omega \supseteq \alpha$, такое, что $P(\Omega) \ni y$; по условию $\Omega \not\subseteq \bigcap_{\zeta < \varrho} \Omega^{(\zeta)}$. Найдется номер ζ', для которого $\Omega \not\subseteq \Omega^{(\zeta')}$. Точка y является предельной для точек множества $\bigcup_{\Omega' \subseteq \Omega^{(\zeta')}} P(\Omega')$.

Итак, пусть точка $y \in P(\Omega_2) \cap (x^{(1)}, x^{(2)})$ является предельной для точек множества $\bigcup_{\Omega \subseteq \Omega_1} P(\Omega)$, причем $\Omega_1 \not\subseteq \Omega_2$. Возьмем точку $x \in \Omega_2$, $x \overline{\in} \Omega_1$ и интервал $[\delta_1, \delta_2]$, содержащий точку x вместе с некоторой окрестностью, но не содержащий точек множества Ω_1 (очевидно, $x \neq \alpha$).

Так как множество Ω_2 бесконечно, точки $T^j y$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, попарно различны. Найдется последовательность $T^{j_1} y > T^{j_2} y > \ldots \to x$ (или $T^{j_1} y < < T^{j_2} y < \ldots \to x$). Пусть $T^{j_k} y \overline{\in} (\delta_1, \delta_2)$. Возьмем замкнутый интервал $U \subset [\delta_1, \delta_2] \cap \cap T^{j_k}(x^{(1)}, x^{(2)})$, не содержащий точку x, содержащий точку $T^{j_k} y$ и какую-либо точку $y' \in \bigcup_{\Omega \subseteq \Omega_1} P(\Omega)$. Существует номер j', такой, что при $j > j'$ $T^j y' \overline{\in} [\delta_1, \delta_2]$.

Найдется номер $j_0 > \max\{j_k, j'\}$, такой, что точка $T^{j_0} y$ лежит между точкой x и интервалом U. Так как $T^{j_0} y' \overline{\in} [\delta_1, \delta_2]$, то либо $T^{j_0} U \supset U$, либо $T^{j_0} U$ содержит точку x вместе с некоторой ее окрестностью.

Если $T^{j_0} U \supset U$, найдется точка $x' \in U$, для которой $T^{j_0} x' = x'$. А это невозможно, так как $U \subset P^*(\alpha)$ и точки циклов, исключая точку α, не принадлежат множеству $P^*(\alpha)$.

Если $T^{j_0} U$ содержит точку x вместе с некоторой окрестностью, то поскольку точка x является предельной для точек циклов (см. [6]), опять получаем противоречие тому, что $T^{j_0} U \subset P^*(\alpha)$.

Итак, существует множество $\Omega \supseteq \alpha$ такое, что $(x^{(1)}, x^{(2)}) \subset P(\Omega)$. Из лемм 2 и 4 вытекает, что и точки $x^{(1)}, x^{(2)} \in P(\Omega)$. Лемма 5 полностью доказана.

Множество $P^*(\alpha)$ есть множество типа G_δ [4]. Из леммы 5 вытекает, что $P^*(\alpha)$ есть множество класса > 1 классификации Бэра—Валле-Пуссена. Доказательство этого факта повторяет доказательство аналогичного утверждения для множества $P(\alpha)$.

Обозначим $P_1^*(\alpha)$ множество, состоящее из точек множества $P^*(\alpha)$, которые принадлежат $P^*(\alpha)$ вместе с некоторой открытой в R окрестностью. Множество $P_1^*(\alpha)$ открыто в R. Обозначим $P^{(j)}(\alpha)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, множество точек $x \in R$, для которых $T^j x = \alpha$. Множества $P^{(j)}(\alpha)$ замкнуты. Множество $P_0(\alpha) = \bigcup_{j=0}^{\infty} P^{(j)}(\alpha)$ есть F_σ-множество. Следовательно, множество $P_1^*(\alpha) \cup P_0(\alpha)$ есть также F_σ-множество.

Возьмем произвольную неподвижную точку β, такую, что для любого интервала $[\alpha, x)$ существует $m = m(x)$, для которого $T^m [\alpha, x) \supseteq [\alpha, \beta]$. Такая точка β существует согласно теореме 2. Для любой точки $\beta' \in (\alpha, \beta]$ $T[\alpha, \beta'] \supseteq [\alpha, \beta']$.

Множество точек $x \in P^*(\alpha) \setminus (P_1^*(\alpha) \cup P_0(\alpha))$, для которых $T^j x \in [\alpha, \beta]$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, обозначим J. Множество J состоит из тех и только тех точек $x \in P^*(\alpha)$, для которых $T^j x \in (\alpha, \beta]$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, и которые являются предельными для точек множества $R \setminus P^*(\alpha)$.

Лемма 6. *Множество J не пусто.*

Точка α является предельной (справа) для неподвижных точек и существует последовательность $x_1 > x_2 > \ldots > x_i > \ldots \to \alpha$, такая, что $Tx_i = x_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$ (теоремы 1 и 3). Найдется точка x_{i_0}, правее которой имеются неподвижные точки. Обозначим β_i, $i \geqslant i_0$, неподвижную точку, ближайшую к x_i справа (множество неподвижных точек есть замкнутое множество); $\beta_i \geqslant \beta_{i+1}$, $T[x_i, \beta_i] \supseteq [x_{i+1}, \beta_{i+1}]$ для $i \geqslant i_0$ и $\beta_i \to \alpha$ при $i \to \infty$.

Найдутся замкнутое множество $M_1 \subseteq [x_{i_0}, \beta_{i_0}]$, для которого $TM_1 = [x_{i_0+1}, \beta_{i_0+1}]$, замкнутое множество $M_2 \subseteq M_1$, для которого $T^2 M_2 = [x_{i_0+2}, \beta_{i_0+2}]$, замкнутое множество $M_3 \subseteq M_2$ и т. д. Множество $\bigcap_{r=1}^{\infty} M_r$ не пусто и, если $x \in \bigcap_{r=1}^{\infty} M_r$, то $T^j x \neq \alpha$ при всех $j \geqslant 0$ и $T^j x \to \alpha$ при $j \to \infty$.

Точка $x \in P^*(\alpha)$, $x \bar{\in} P_0(\alpha)$. Если $x \in P_1^*(\alpha)$, рассмотрим наибольший интервал, содержащий точку x и принадлежащий $P^*(\alpha)$. Если точка x' есть, например, левый конец этого интервала, то $x' \in P(\alpha)$, $x' \bar{\in} P_1^*(\alpha)$ (лемма 5). Точка x' не принадлежит $P_0(\alpha)$: если допустить, что $T^k x' = \alpha$, то $T^k[x', x] \subset P(\alpha)$ и является интервалом, отличным от точки, левым концом которого служит точка α, что невозможно.

Итак, точка $x \in P(\alpha)$, не принадлежащая множествам $P_1^*(\alpha)$ и $P_0(\alpha)$, всегда существует. Для любой точки $\beta > \alpha$ найдется номер j', такой, что $T^j x \in [\alpha, \beta]$ при $j \geqslant j'$. Точка $T^{j'} x$ принадлежит множеству J.

Следствие. *Точка α является предельной для точек множества J.*

Лемма 7. *J есть множество типа G_δ.*

Положим $N(\beta) = \bigcap_{r=0}^{\infty} N^{(r)}$, где $N^{(r)}$ — множество точек $x \in [\alpha, \beta]$, для которых $T^j x \in [\alpha, \beta]$, $j = 0, 1, 2, \ldots, r$. Так как каждое $N^{(r)}$, $r \geqslant 0$, есть замкнутое множество, то и множество $N(\beta)$ замкнуто. Множество $P^*(\alpha)$ есть G_δ, множество $P_1^*(\alpha) \cup P_0(\alpha)$ есть F_σ. Так как $J = N(\beta) \cap \{P^*(\alpha) \setminus (P_1^*(\alpha) \cup P_0(\alpha))\}$, то J есть множество типа G_δ.

Лемма 8. $TJ = J$.

Множество $P_2^*(\alpha) = P^*(\alpha) \setminus P_1^*(\alpha)$ состоит из тех и только тех точек множества $P^*(\alpha)$, которые являются предельными для точек множества $R \setminus P^*(\alpha)$. Если точка $x \in P_2^*(\alpha)$, то точка $Tx \in P^*(\alpha)$. Поскольку отображение непрерывно и $T(R \setminus P^*(\alpha)) \subset R \setminus P^*(\alpha)$, то точка Tx является предельной для точек множества $R \setminus P^*(\alpha)$. Следовательно, $Tx \in P_2^*(\alpha)$. Если $x \in J$, т. е. $x \in P_2^*(\alpha)$ и $T^j x \in (\alpha, \beta]$ при $j \geqslant 0$, то и $Tx \in P_2^*(\alpha)$, $T^j(Tx) \in (\alpha, \beta]$ при $j \geqslant 0$, т. е. $Tx \in J$. Это означает, что $TJ \subseteq J$.

Если $x \in J$, то, поскольку $T(\alpha, \beta] \supset (\alpha, \beta]$, существует точка $y_0 \in (\alpha, \beta]$, для которой $Ty_0 = x$. Если точка y_0 является предельной для точек множества $R \setminus P^*(\alpha)$, то $y_0 \in J$. Если точка $y_0 \bar{\in} P_2^*(\alpha)$, то существует интервал $[y_1, y_2] \subset P^*(\alpha)$, содержащий точку y_0, причем $y_1, y_2 \in P_2^*(\alpha)$. Так как $T[y_1, y_2] \ni x$ и $x \in P_2^*(\alpha)$, то по крайней мере одна из точек Ty_1, Ty_2 совпадает с x. Так как $\beta \bar{\in} P^*(\alpha)$, то $[y_1, y_2] \subset (\alpha, \beta]$. Итак, для любой точки $x \in J$ найдется точка $y \in J$, такая, что $Ty = x$, т. е. $TJ \supseteq J$.

Таким образом, $TJ = J$.

Лемма А. *Построим отображение* $\overline{T}: \overline{T}x = Tx$, *если* $Tx \leqslant \beta$, $\overline{T}x = \beta$, *если* $Tx > \beta$. *Если* $x \in J$ *и интервал* $V = [x, x')$ (*или* $(x'', x]$) *содержит точку* $y \in R \setminus P^*(\alpha)$, *то для любой точки* $\xi \in (\alpha, \beta)$ *найдется номер* j_0, *такой, что* $\overline{T}^j V \supseteq [\xi, \beta]$ *при* $j \geqslant j_0$.

Положим $y_0 = \inf\limits_{j=0,1,2,\ldots} \overline{T}^j y$. Очевидно, $y_0 > \alpha$ и $\overline{T}y_0 \geqslant y_0$. Пусть δ — неподвижная точка, $\alpha < \delta < y_0$, причем интервал (δ, y_0) содержит хотя бы одну точку y_1, для которой найдется номер j_1, такой, что $\overline{T}^{j_1} y_1 = \beta$, и хотя бы одну точку $y_2 \in J$. Такая точка δ существует, поскольку точка α является предельной для неподвижных точек, точек множества J и точек, которые $\overline{T}$ отображает в точку β за конечное число шагов. Найдутся номер $j_2: \overline{T}^{j_2} y_2 \in [\alpha, \xi]$ и номер $j_3: \overline{T}^{j_3} V \supseteq [\delta, y_0]$ (интервал V содержит точку $x \in J$ и точку y). Положим, $j_0 = j_3 + \max\{j_1, j_2\}$. Так как $[\delta, y_0] \subseteq \overline{T}[\delta, y_0] \subseteq \subseteq \overline{T}^2 [\delta, y_0] \subseteq \ldots$, то при $j \geqslant j_0$ $\overline{T}^j V \supseteq [\xi, \beta]$.

Из леммы А, в частности, вытекает, что интервал V содержит хотя бы одну точку множества J, отличную от x.

Будем говорить, что множество $U \subset P_2^*(\alpha)$ обладает s-свойством, если всякая точка $x \in U$, предельная слева (справа) для точек множества $R \setminus P^*(\alpha)$, является предельной слева (соответственно справа) для точек множества U.

Так как всякая точка $x \in P_2^*(\alpha)$ является предельной для точек множества $R \setminus P^*(\alpha)$, то любое множество, обладающее s-свойством, плотно в себе.

Множество J, как это вытекает из леммы А, обладает s-свойством.

Лемма 9. *Множество J гомеоморфно множеству иррациональных чисел.*

Множество J плотно в себе и, по определению, не содержит никакого открытого интервала.

Утверждается, что множество J нигде не компактно. Допустим противное: существует открытый интервал I, такой, что $J \cap I$ есть непустое совершенное нигде не плотное множество. Рассмотрим произвольный интервал $I' \subset I$, смежный к множеству $J \cap I$. Интервал I' не содержит точек множества $R \setminus P^*(\alpha)$, ибо в противном случае интервал I' согласно лемме А содержал бы точки множества J. Следовательно, $I \subset P^*(\alpha)$ и множество J в соответствии с определением может содержать лишь концы интервала I. Это противоречит предположению, что множество $J \cap I$ совершенно.

Таким образом, множество J есть нигде не компактное G_δ и, следовательно (см. [7]), гомеоморфно множеству иррациональных чисел.

Лемма 10. *Для любого открытого в J множества U и любой точки $\xi \in (\alpha, \beta)$ существует номер j_0, такой, что $T^j U \supseteq J \cap [\xi, \beta]$ при $j \geqslant j_0$.*

Лемма 10 немедленно вытекает из леммы А.

Лемма 11. *Образ всякого открытого в J множества содержит открытое в J множество.*

В самом деле, пусть U — открытое в J множество, I — открытый интервал, такой, что $U \supseteq J \cap I$, и $x \in J \cap I$. Точка x является предельной для точек множества $R \setminus P^*(\alpha)$, например, слева. Возьмем точку $x' < x$, $x' \in I \cap \cap (R \setminus P^*(\alpha))$. Пусть, для определенности, $Tx' < Tx$. Интервал (Tx', Tx) согласно лемме А содержит хотя бы одну точку множества J. Множество $V = J \cap (Tx', Tx)$ есть непустое открытое в J множество. Так как $T(x', x) \supseteq \supseteq (Tx', Tx)$, то для любой точки $y \in V$ найдется точка $y' \in (x', x)$, для которой $Ty' = y$. Точка $y' \in P^*(\alpha)$ и, если y' является предельной для точек множества $R \setminus P^*(\alpha)$, т. е. $y' \in P_2^*(\alpha)$, то $y' \in J$. Если $y' \overline{\in} P_2^*(\alpha)$, то существует интервал $[y'', y'''] \subset P^*(\alpha)$, содержащий точку y', причем $y'', y''' \in$

$\in P_2^*(\alpha)$. Так как $T[y'', y'''] \ni y$ и $y \in P_2^*(\alpha)$, то по крайней мере одна из точек Ty'', Ty''' совпадает с y; $[y'', y'''] \subset (x', x,)$, так как $y' \in (x', x)$, $x' \in R \setminus P^*(\alpha)$ и точка x является предельной слева для точек множества $R \setminus P^*(\alpha)$. Итак, для любой точки $y \in V$ найдется точка $y^* \in P_2(\alpha) \cap (x', x)$, для которой $Ty^* = y$. Точка y^* принадлежит множеству $J \cap I$.

Следовательно, $TU \supseteq V$.

Лемма 12. *Если множество $U \subset J$ обладает s-свойством, то и множество $T^{-1}U$* обладает s-свойством.*

Действительно, пусть точка $x \in T^{-1}U$ и является предельной, например, слева для точек множества $R \setminus P^*(\alpha)$. Возьмем последовательность $x_1 < < x_2 < \ldots < x_i < \ldots \to x$, $x_i \in R \setminus P^*(\alpha)$. Покажем, что интервал (x_i, x) при любом $i \geqslant 1$ содержит по крайней мере одну точку множества $T^{-1}U$.

Так как отображение T непрерывно и $Tx_i \neq Tx$ при любом $i \geqslant 1$, то найдется последовательность $Tx_{i_1} < Tx_{i_2} < \ldots < Tx_{i_k} < \ldots \to Tx$ (или $Tx_{i_1} > > Tx_{i_2} > \ldots \to Tx$). Это означает, что точка Tx является предельной слева для точек множества U. Для любого $i' \geqslant 1$ найдется точка $y \in U$: $y \in \in (Tx_{i_{k'}}, Tx)$, $i_{k'} \geqslant i'$. $T(x_{i'}, x) \geqslant (Tx_{i_{k'}}, Tx)$. Существует точка $y' \in (x_{i'}, x)$, для которой $Ty' = y$; $y' \in P^*(\alpha)$; если $y' \in P_2^*(\alpha)$, то $y' \in T^{-1}U$. Если $y' \overline{\in} \overline{\in} P_2^*(\alpha)$, найдется интервал $[y'', y''') \subset P^*(\alpha)$, содержащий точку y', причем $y'', y''' \in P_2^*(\alpha)$. Так как $x_{i'} \in R \setminus P^*(\alpha)$ и точка x является предельной слева для точек множества $R \setminus P^*(\alpha)$, то $[y'', y'''] \subset (x_{i'}, x)$. Таким образом, точка $y^* \in (x_{i'}, x)$, для которой $Ty^* = y$, предельная для точек $R \setminus P^*(\alpha)$, существует; $y^* \in T^{-1}U$.

Лемма 13. *Пусть δ — произвольная неподвижная точка, разбивающая J на два непустых множества. Тогда*

1) *множество F точек $x \in J$, таких, что $T^j x \in [\alpha, \delta]$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, есть непустое совершенное нигде не плотное на J множество;*
2) *множество F обладает s-свойством;*
3) $TF = F$;
4) *для любого открытого в F множества U и любой точки $\xi \in (\alpha, \delta)$ существует номер j_0, такой, что $T^j U \supseteq F \cap [\xi, \delta]$ при $j \geqslant j_0$.*

Если $\beta = \delta$, то $J = F$. Следовательно, множество F не пусто, плотно в себе и имеют место утверждения 2, 3, 4, поскольку аналогичные утверждения справедливы для множества J.

Множество $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} F^{(k)}$, где $F^{(k)}$ — множество точек $x \in J$, для которых $T^j x \in [\alpha, \delta]$, $j = 0, 1, \ldots, k$. Так как каждое $F^{(k)}$ замкнуто в J, то F есть замкнутое в J множество.

Если V — открытое в J множество, то найдется номер j' такой, что $T^{j'}V \supseteq J \cap (\delta, \beta)$. Множество $J \cap (\delta, \beta)$ есть непустое открытое в J множество. Открытое в J множество $V' \subset V$, для которого $T^{j'}V' = J \cap (\delta, \beta)$, не содержит точек множества F.

Следовательно, множество F нигде не плотно на J.

Лемма 14. *Множество $\bigcup_{j=0}^{\infty} T^{-j}F$ всюду плотно на J.*

Это следует из того, что 1) для любой точки $x \in J$ множество точек y, для которых $T^j y = x$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, всюду плотно на J (лемма 10); 2) множество F не пусто.

* Здесь и далее под $T^{-j}U$, $j > 0$, понимается множество точек $x \in J$, для которых $T^j x \in U$.

Положим $F^1 = F$, $F^2 = T^{-1}F \setminus F$, $F^j = T^{-1}F^{j-1}$, $j = 3, 4, 5, \ldots$. Так как $TJ = J$, то $TF^j = F^{j-1}$ при $j > 2$; $TF^2 \subseteq F^1$, $TF^1 = F^1$.

Лемма 15. *Множества F^j, $j = 1, 2, \ldots$, суть непустые совершенные и нигде не плотные на J множества, обладающие s-свойством и не имеющие попарно общих точек.*

В самом деле, множество F нигде не плотно на J (лемма 13). Следовательно (лемма 11), нигде не плотны на J множества $T^{-j}F$, $j = 1, 2, \ldots$, а вместе с ними и множества F^j, $j = 1, 2, \ldots$. Так как множество $\bigcup_{j=1}^{\infty} F^j = \bigcup_{j=0}^{\infty} T^{-j}F$ всюду плотно на J (лемма 14), то множества F^j, $j = 1, 2, \ldots$, не пусты.

Множества $F^1 = F$ и $F^2 = T^{-1}F \setminus F$ не имеют общих точек. Если бы множества F^{j_1} и F^{j_2}, $j_2 > j_1 \geqslant 1$, имели общие точки, то множества $T^{j_2-2}F^{j_2}$ и $T^{j_2-2}F^{j_1}$ также имели бы общие точки, но $T^{j_2-2}F^{j_2} = F^2$, $T^{j_2-2}F^{j_1} = T^{j_2-j_1}F^2 \subseteq F^1$.

Множество $F^1 = F$ обладает s-свойством и замкнуто в J (лемма 13). Следовательно, $T^{-1}F$ обладает s-свойством (лемма 12) и замкнуто. Так как $F \subset [\alpha, \delta]$, $T^{-1}F \setminus F \subset (\delta, \beta]$ и $\delta \overline{\in} J$, то множество $F^2 = T^{-1}F \setminus F$ также обладает s-свойством и замкнуто. В таком случае и множества F^j, $j > 2$, обладают s-свойством (лемма 12) и замкнуты. Если множество удовлетворяет s-свойству, то оно плотно в себе.

Следовательно, множества F^j, $j = 1, 2, \ldots$, суть совершенные множества.

Выберем последовательность неподвижных точек $\delta_1 > \delta_2 > \ldots \to \alpha$ так, чтобы 1) точка δ_1 разбивала множество J на два непустых множества, 2) точка δ_{i+1}, $i > 0$, разбивала множество F_i, состоящее из точек $x \in J$, для которых $T^j x \in [\alpha, \delta_i]$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, на два непустых множества.

Множества F_i, $i = 1, 2, \ldots$, суть непустые совершенные и нигде не плотные на J множества (лемма 13), причем $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$.

Множество F_i, $i > 1$, нигде не плотно на F_{i-1}. Это следует из леммы 13. Достаточно заметить, что множество F_i не зависит от выбора точки β, и если $\beta = \delta_{i-1}$, то $J = F_{i-1}$.

Положим $F_i^1 = F_i$, $F_i^2 = T^{-1}F_i \setminus F_i$, $F_i^j = T^{-1}F_i^{j-1}$, $j = 3, 4, \ldots, i = 1, 2, \ldots$.

Множества F_i^j, $i, j = 1, 2, \ldots$, суть непустые совершенные и нигде не плотные на J множества, не имеющие попарно общих точек (лемма 15).

Лемма 16. *Множество $F_1^{j_1} \cap F_2^{j_2} \cap \ldots \cap F_k^{j_k}$ при любых $j_1, \ldots, j_k$, $k \geqslant 1$, если оно не пусто, обладает s-свойством.*

Множество $F_1^{j_1} \cap F_2^{j_2} \cap \ldots \cap F_k^{j_k}$ может быть непустым лишь при условии, что $j_1 \leqslant j_2 \leqslant \ldots \leqslant j_k$. Действительно, если $j_m > j_{m+1}$, то $F_m^{j_m} \cap F_{m+1}^{j_{m+1}}$ есть пустое множество, так как $T^{j_{m+1}-1}F_{m+1}^{j_{m+1}} \subseteq F_{m+1}^1 \subset F_m^1$, $T^{j_{m+1}-1}F_m^{j_m} = F_m^{j_m - j_{m+1}}$, $j_m - j_{m+1} + 1 > 1$. Таким образом, лемму достаточно доказать для случая, когда $j_1 \leqslant j_2 \leqslant \ldots \leqslant i_k$.

Доказательство проведем по индукции.

Множество $F_k^{j_k}$ обладает s-свойством (лемма 15).

Предположим, множество $F_m^{j_m} \cap F_{m+1}^{j_{m+1}} \cap \ldots \cap F_k^{j_k}$ при любых $j_m, j_{m+1}, \ldots, j_k$ обладает s-свойством, и покажем, что в таком случае и множество $F_{m-1}^{j_{m-1}} \cap F_m^{j_m} \cap \ldots \cap F_k^{j_k}$ при любых $j_{m-1}, j_m, \ldots, j_k$ обладает s-свойством.

1) $j_{m-1} = 1$. По предположению, множество $J \cap F_m^{j_m} \cap \ldots \cap F_k^{j_k}$ обладает s-свойством. При определении множества J мы могли с самого нача-

ла взять в качестве точки β точку δ_{m-1} и тогда было бы $J = F^1_{m-1}$ и $J \cap F^{j_m}_m \cap \ldots \cap F^{j_k}_k = F^1_{m-1} \cap F^{j_m}_m \cap \ldots \cap F^{j_k}_k$. Следовательно, множество $F^1_{m-1} \cap \cap F^{j_m}_m \cap \ldots \cap F^{j_k}_k$ при любых $j_m, \ldots, j_k$ обладает s-свойством.

2) $j_{m-1} = 2$. Множество $F^1_{m-1} \cap F^{j_m-1}_m \cap \ldots \cap F^{j_k-1}_k$ обладает s-свойством (пункт 1). Тогда множество $T^{-1}(F^1_{m-1} \cap F^{j_m-1}_m \cap \ldots \cap F^{j_k-1}_k)$ также обладает s-свойством (лемма 12).

Для любых множеств $M_1, M_2 \subset J$ имеет место соотношение: $T^{-1}(M_1 \cap M_2) = T^{-1}M_1 \cap T^{-1}M_2$. Поэтому $T^{-1}(F^1_{m-1} \cap F^{j_m-1}_m \cap \ldots \cap F^{j_k-1}_k) = T^{-1}F^1_{m-1} \cap \cap T^{-1}F^{j_m-1}_m \cap \ldots \cap T^{-1}F^{j_k-1}_k$.

Так как $F^2_{m-1} = (\delta_{m-1}, \beta) \cap T^{-1}F^1_{m-1}$ и $\delta_s < \delta_{m-1}$ при $s \geqslant m$, то $F^2_{m-1} \cap \cap T^{-1}F^{j_s-1}_s = F^2_{m-1} \cap F^{j_s}_s$ при $s \geqslant m$ и $T^{-1}F^1_{m-1} \cap T^{-1}F^{j_m-1}_m \cap \ldots \cap T^{-1}F^{j_k-1}_k \cap \cap (\delta_{m-1}, \beta) = F^2_{m-1} \cap F^{j_m}_m \cap \ldots \cap F^{j_k}_k$.

Следовательно, множество $F^2_{m-1} \cap F^{j_m}_m \cap \ldots \cap F^{j_k}_k$, если оно не пусто, обладает s-свойством.

3) $j_{m-1} > 2$. Множество $F^2_{m-1} \cap F^{j_m-(j_{m-1}-2)}_m \cap \ldots \cap F^{j_k-(j_{m-1}-2)}_k$ обладает s-свойством (пункт 2). Следовательно (лемма 12), множество $T^{-(j_{m-1}-2)}(F^2_{m-1} \cap \cap F^{j_m-(j_{m-1}-2)}_m \cap \ldots \cap F^{j_k-(j_{m-1}-2)}_k)$ обладает s-свойством.

Для любых множеств $M_1, M_2 \subset J$ и любого $j > 0$ $T^{-j}(M_1 \cap M_2) = T^{-j}M_1 \cap T^{-j}M_2$. Для любых $j > 0$, $s \geqslant 1$, $r \geqslant 2$ $T^{-j}F^r_s = F^{r+j}_s$. Поэтому $T^{-(j_{m-1}-2)}(F^2_{m-1} \cap F^{j_m-(j_{m-1}-2)}_m \cap \ldots \cap F^{j_k-(j_{m-1}-2)}_k) = F^{j_{m-1}}_{m-1} \cap F^{j_m}_m \cap \ldots \cap F^{j_k}_k$.

Таким образом, множество $F^{j_{m-1}}_{m-1} \cap F^{j_m}_m \cap \ldots \cap F^{j_k}_k$ при любых j_{m-1}, $j_m, \ldots, j_k$ обладает s-свойством. Лемма доказана.

Следствие. *Множество $F^{j_1}_1 \cap F^{j_2}_2 \cap \ldots \cap F^{j_k}_k$, если оно не пусто, есть совершенное множество.*

Лемма 17. *Если U — открытое в $F^{j_1}_1 \cap F^{j_2}_2 \cap \ldots \cap F^{j_k}_k$ множество, то TU содержит подмножество, открытое в $F^{j'_1}_1 \cap F^{j'_2}_2 \cap \ldots \cap F^{j'_k}_k$, где $j'_s = j_s - 1$, если $j_s > 1$, и $j'_s = 1$, если $j_s = 1$, $s = 1, 2, \ldots, k$.*

Пусть I — открытый интервал, такой, что $U \supseteq I \cap F^{j_1}_1 \cap \ldots \cap F^{j_k}_k$ и $x \in \in I \cap F^{j_1}_1 \cap \ldots \cap F^{j_k}_k$. Точка x является предельной, например, слева для точек множества $R \setminus P^*(\alpha)$; существует последовательность $x_1 < x_2 < \ldots \ldots < x_i < \ldots \to x$, $x_i \in I \cap (R \setminus P^*(\alpha))$. Так как $Tx_i \neq Tx$ при любом $i \geqslant 1$, найдется последовательность $Tx_{i_1} < Tx_{i_2} < \ldots \to Tx$ (или $Tx_{i_1} > Tx_{i_2} > \ldots \to Tx$). Точка Tx является предельной слева для точек множества $F^{j'_1}_1 \cap \ldots \cap F^{j'_k}_k$ (поскольку $Tx \in F^{j'_1}_1 \cap \ldots \cap F^{j'_k}_k$ и множество $F^{j'_1}_1 \cap \ldots \cap F^{j'_k}_k$ обладает s-свойством). Следовательно, множество $V = F^{j'_1}_1 \cap \ldots \cap F^{j'_k}_k \cap (Tx_{i_1}, Tx)$ есть непустое открытое в $F^{j'_1}_1 \cap \ldots \cap F^{j'_k}_k$ множество. Так как $T(x_1, x) \supseteq (Tx_{i_1}, Tx)$, то для любой точки $y \in V$ найдется точка $y' \in (x_1, x) \cap P^*_2(\alpha)$ (см., например, доказательство леммы 11). Очевидно, $y' \in F^{j_s}_s$, $s = 1, 2, \ldots, k$, и, следовательно, $TU \supseteq V$.

Следствие. *Множество $F^{j_k}_k$ нигде не плотно на множестве $F^{j_1}_1 \cap \ldots \ldots \cap F^{j_{k-1}}_{k-1}$ при любых $j_1, \ldots, j_{k-1}, j_k$.*

Это немедленно вытекает из леммы, поскольку множество F^1_k нигде не плотно на множестве $F^1_1 \cap \ldots \cap F^1_{k-1} = F^1_{k-1}$.

Лемма 18. *Множество* $\bigcup_{j_k=1}^{\infty} F_k^{j_k}$ *всюду плотно на множестве* $F_1^{j_1}\cap\ldots$ $\ldots\cap F_{k-1}^{j_{k-1}}$ *при любых* $j_1, \ldots, j_{k-1}$.

Действительно, пусть U — открытое в $F_1^{j_1}\cap\ldots\cap F_{k-1}^{j_{k-1}}$ множество и x — произвольная точка множества F_k^1. Множество $F_1^{j_1}\cap\ldots\cap F_{k-1}^{j_{k-1}}$ может быть не пусто лишь при условии $j_{k-1}\geqslant j_{k-2}\geqslant\ldots\geqslant j_1$. Множество $T^{j_{k-1}-1}U$ содержит подмножество, открытое в $F_1^1\cap F_2^1\cap\ldots\cap F_{k-1}^1=F_{k-1}^1$ (лемма 17). Следовательно [лемма 13,4)], найдется номер j_0, такой, что $T^{j_0+j_{k-1}-1}U\ni x$. Точка $y\in U$, для которой $T^{j_0+j_{k-1}-1}y=x$, принадлежит множеству $\bigcup_{j_k=1}^{\infty} F_k^{j_k}$.

Положим $p_{j_1j_2\ldots j_k}=F_1^{j_1}\cap F_2^{j_2}\cap\ldots\cap F_k^{j_k}$, $j_1, j_2, \ldots, j_k=1, 2, \ldots$, $k=1, 2, \ldots$.

Множества $p_{j_1j_2\ldots j_k}$ суть совершенные нигде не плотные на J множества (некоторые из них могут быть пустыми), причем

1) $p_{j_1\ldots j_{k-1}j_k}\subset p_{j_1\ldots j_{k-1}}$,

2) $p_{j_1\ldots j_{k-1}j_k}$ нигде не плотно на $p_{j_1\ldots j_{k-1}}$,

3) $\bigcup_{j_k=1}^{\infty} p_{j_1\ldots j_{k-1}j_k}$ всюду плотно на $p_{j_1\ldots j_{k-1}}$.

Положим $J(\alpha)=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j_1,\ldots,j_k=1}^{\infty} p_{j_1\ldots j_k}$. $J(\alpha)$ есть множество 3-го класса классификации Бэра — Валле-Пуссена (см. [5]). Если $x\in J(\alpha)$, то $T^jx\to\alpha$, т. е. $x\in P(\alpha)$. Если $x\in J\setminus J(\alpha)$, то существует номер k такой, что $T^jx\,\overline{\in}\,F_s$ при $s\geqslant k$, т. е. $x\,\overline{\in}\,P(\alpha)$. Таким образом, $J(\alpha)=P(\alpha)\cap J$. Отсюда вытекает, что $P(\alpha)$ есть множество 3-го класса.

6. Если T — непрерывное отображение отрезка R вещественной прямой, структуру $K_\alpha(T)$, $\alpha\in R$, нетрудно описать.

В каждой неподвижной точке α можно выделить следующие конуса: «двусторонний» конус $K=R$, «односторонние» конуса $K^-: x\leqslant\alpha$ и $K^+: x\geqslant\alpha$ и конус $K^0: x=\alpha$.

Конуса $K, K^0\in K_\alpha(T)$. Возможны три случая:

1) $K^-, K^+\in K_\alpha(T)$;

2) $K^-\in K_\alpha(T)$, $K^+\,\overline{\in}\,K_\alpha(T)$ (либо $K^+\in K_\alpha(T)$, $K^-\,\overline{\in}\,K_\alpha(T)$);

3) $K^-, K^+\,\overline{\in}\,K_\alpha(T)$.

Последний случай, как легко видеть, распадается на два:

3а) $K^-, K^+\in K_\alpha(T^2)$;

3б) $K^-, K^+\,\overline{\in}\,K_\alpha(T^2)$ (и тогда $K^-, K^+\,\overline{\in}\,K_\alpha(T^m)$ при любом $m\geqslant 1$).

В случае 2) (и только в этом случае) могут существовать неподвижные точки всех типов, включая смешанную неподвижную точку типа $б_1$.

Для неподвижных точек в конусе K имеют место утверждения, аналогичные теоремам 1—3.

Теорема 1′. *Неподвижная точка* α *обладает свойством а тогда и только тогда, когда существует последовательность точек*

$$(1^-)\ x_1<x_2<\ldots\to\alpha: x_{j+1}\leqslant T^2x_j\leqslant\alpha$$

или

$$(1^+)\ x_1'>x_2'>\ldots\to\alpha: x_{j+1}'\geqslant T^2x_j\geqslant\alpha,\qquad j=1, 2, \ldots .$$

Теорема 2′ *Неподвижная точка α обладает свойством r тогда и только тогда, когда существует последовательность точек*

$$(2^-)\ x_1 < x_2 < \ldots \to \alpha : T^{s_j} x_{j+1} \leqslant x_j, \qquad s_j \geqslant 1,$$

или

$$(2^+)\ x'_1 > x'_2 > \ldots \to \alpha : T^{s'_j} x'_{j+1} \geqslant x'_j,\ s'_j \geqslant 1, \qquad j = 1, 2, \ldots .$$

Теорема 3′. *Неподвижная точка α обладает свойством i тогда и только тогда, когда существует последовательность точек*

$$(3^-)\ x_1 < x_2 \ldots \to \alpha : T^2 x_j = x_j$$

или

$$(3^+)\ x'_1 > x'_2 > \ldots \to \alpha : T^2 x'_j = x'_j, \qquad j = 1, 2, \ldots .$$

Нетрудно установить взаимнооднозначное соответствие между типом неподвижной точки и структурой множеств $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{R}$. Соответствующие формулировки мы приводить здесь не станем и отметим лишь следующее.

Множество $P(\alpha)$ является множеством 3-го класса классификации Бэра—Валле-Пуссена тогда и только тогда, когда существуют последовательности

(I) типа 1^- и 2^-

или

(II) типа 1^+ и 2^+.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству соответствующего утверждения п. 5.

Условия (I) или (II) имеют место тогда и только тогда, когда для всякой окрестности U точки α существует точка x, такая, что $\Omega_x \subset U$, $\alpha \in \Omega_x$, $\alpha \neq \Omega_x$.

Таким образом, множество $P(\alpha)$ является множеством 3-го класса тогда и только тогда, когда во всякой окрестности U точки α существует множество $\Omega_x \subset U$, $\Omega_x \ni \alpha$, $\Omega_x \neq \alpha$*.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Курош, Лекции по общей алгебре, Физматгиз, М., 1962.
2. П. Монтель, Нормальные семейства аналитических функций, М.—Л., 1936.
3. B. Barna, Über die Iteration reeler Funktionen, Public. Math. Debrecen, 7, 1960.
4. А. Н. Шарковский, О притягивающих и притягивающихся множествах, ДАН СССР, т. 160, № 5, 1965.
5. Н. Н. Лузин, Лекции об аналитических множествах, Гостехиздат, М., 1953.
6. Х. Қ. Кенжегулов, А. Н. Шарковский, О свойствах множества предельных точек итерационной последовательности, Волжский матем. сб., вып. 3, Изд-во Куйбышевск. пед. ин-та, 1965.
7. П. С. Александров, П. С. Урысон, О нульмерных множествах, Math. Ann., 98, 1927.

Поступила 5.III 1965 г.
Киев

* В работе автора [4] формулировка условий теоремы 7 в случае, когда Ω — *цикл* (обозначения [4]), содержит неточность. Теорема 7 должна формулироваться так: если Ω содержит цикл и во всякой окрестности множества Ω существует $\Omega' \supset \Omega$, то множество $P(\Omega)$ есть множество третьего класса классификации Бэра—Валле-Пуссена.